

Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, ianuarie 2026

Clasa a XII-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} definim operația asociativă

$$x \circ y = 8 \left(x + \frac{1}{8} \right) \left(y + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8}.$$

a) Determinați elementele egale cu simetricele lor față de operația „ \circ ”.b) Demonstrați că $\frac{1}{8} \circ \frac{2}{8} \circ \dots \circ \frac{n}{8} = \frac{(n+1)!-1}{8}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.**Soluție.** a) Elementul neutru este $e = 0$ 5p

$$x \circ x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ sau } x = 0. \text{ 5p}$$

b) Demonstrăm prin inducție $P(n): \frac{1}{8} \circ \frac{2}{8} \circ \dots \circ \frac{n}{8} = \frac{(n+1)!-1}{8}, n \geq 2$.Deoarece $\frac{1}{8} \circ \frac{2}{8} = 8 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{8} = \frac{3! - 1}{8}$, rezultă că $P(2)$ este adevărată. 5pPresupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural $k \geq 2$. Avem:

$$\frac{1}{8} \circ \frac{2}{8} \circ \dots \circ \frac{k}{8} \circ \frac{k+1}{8} = \frac{(k+1)!-1}{8} \circ \frac{k+1}{8} = 8 \left(\frac{(k+1)!-1}{8} + \frac{1}{8} \right) \left(\frac{k+1}{8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8} = 8 \cdot \frac{(k+1)!}{8} \cdot \frac{k+2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{(k+2)!-1}{8}, \text{ deci } P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Prin urmare, $P(n)$ este adevărată, pentru orice $n \geq 2$ 8p**Problema 2.** Se consideră funcția $f_n: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, dt$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.a) Determinați $f_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$.b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1)$.c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} n f_n(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\textbf{Soluție. a) } f_1(x) = \int_0^x t \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}. \text{ 8p}$$

$$\textbf{b) } 0 \leq f_n(1) = \int_0^1 t^n \operatorname{arctg} t \, dt \leq \frac{\pi}{4} \int_0^1 t^n dt = \frac{\pi}{4} \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0. \text{ 5p}$$

$$c) f_n(1) = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' \arctg t \, dt = \frac{\pi}{4} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt. \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Cum } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}, \text{ rezultă că } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt = 0, \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{deci } \lim_{n \rightarrow +\infty} n f_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \right) = \frac{\pi}{4}. \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. *Dată funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definim pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale operația „ $*$ ” prin*

$$x * y = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

*Determinați funcția f știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ este un element $x' \in [-1, 1]$.*

Soluție. Notăm cu e elementul neutru al grupului $(\mathbb{R}, *)$. Din $x = x * e, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = x - f(e), \forall x \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 5p$

Pentru $x = e$ obținem $f(e) = \frac{e}{2}$, așadar $f(x) = x - \frac{e}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 5p$

Deoarece $x * x' = e$, avem că $f(x) + f(x') = e$, prin urmare $x' = 2e - x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}. \dots\dots 5p$

Pentru $x = 1$ obținem că $x' = 2e - 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [0, 1]$.

Pentru $x = -1$ obținem că $x' = 2e + 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [-1, 0]$.

În concluzie $e = 0$, deci $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 5p$

Această funcție verifică toate condițiile din ipoteza problemei. $\dots\dots\dots 2p$

Problema 4. *Fie $0 \leq a < b$ două numere reale și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a, b]$, cu derivata a doua continuă. Dacă*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} (a^2 f'(a) - b^2 f'(b)) + bf(b) - af(a),$$

arătați că există $c \in (a, b)$ pentru care $f''(c) = 0$.

Soluție. Avem:

$$\int_a^b f(x) dx = xf(x) \Big|_a^b - \int_a^b xf'(x) dx = \dots\dots\dots 5p$$

$$= bf(b) - af(a) - \left[\frac{x^2}{2} f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x) dx \right] = \dots\dots\dots 4p$$



$= bf(b) - af(a) + \frac{1}{2}(a^2 f'(a) - b^2 f'(b)) + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x) dx$. Ținând seama de ipoteză, rezultă că

$\int_a^b x^2 f''(x) dx = 0$ **3p**

Conform teoremei de medie, există $c \in (a, b)$ pentru care $\int_a^b x^2 f''(x) dx = c^2 f''(c)(b-a)$ **5p**

Cum $c \neq 0$, $b-a \neq 0$ (deoarece $0 \leq a < c < b$), urmează că $f''(c) = 0$ **5p**

Se adaugă 10 puncte din oficiu

Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător